תרגול 9

הקדמה

* עברנו נושא: מערכת פורמאלית
* סמנטיקה של פסוקים

בשפה הטבעית ובשפה הפורמאלית

לפתרון תרגילים מס 5A

* כללי הגזירה של גזירה פשוטה
* דוגמאות
* סיכום

הקדמה

עד כה עסקנו הרבה בשפה טבעית וביחסים בין ערכי אמת ותנאי אמת.

בתחומים האלה דברים כמו שקילות לוגית שיחקו תפקיד מרכזי - למשל כששקלנו אם תרגום הוא נכון או לא.

בהוכחות פורמאליות יש חשיבות מרכזית ומכרעת אך ורק לצורה או לסכמות.

ספציפית, מכיוון שנוכיח תקפות של טיעונים, מה שמעניין בו זה מה שנשתמש בו הוא צורות (סכמות) של טיעונים תקפים.

טיעונים, כזכור, מורכבים מפסוקים; לכן כדאי להקדיש תשומת לב לקונספט של סכמה של פסוק.

לנוחיות רבה נתחיל מלאפיין הדבר כמו סכמה בשפה הטבעית.

המטרה בחלק הראשון של התרגול: להתרגל לחשוב "בסכמות" ולתרגל חשיבה מסודרת בנושא.

סכמות בשפה הטבעית

ראינו בתרגיל 2 שניתן לעשות "תרגום הפוך" של פסוק - מתחשיב לשפה הטבעית.

על מנת לקרוא את הפסוק $\sim G \to \sim W$ בשפה הטבעית, למשל, ניתן להיעזר בכמה מהסכמות שראינו:

לדוגמא, בהנחה ש- G מסמן את הפסוק "האלים מרוצים" ו-W את הפסוק "החיטה צומחת" –

דרך הסכמה "רק אם □ אז △", שמתאים לה פה מהסכמה $\sim\square \to \sim\triangle$

$\sim\boxed{G} \to \sim\triangle W$ נקבל: "רק אם האלים מרוצים אז החיטה צומחת", מפני ש- G נכנס ל-□ ו-W ל-△

דרך הסכמה "אם □ אז △", שמתאים לה פה מהסכמה $\square \to \triangle$

$\boxed{\sim G} \to \triangle{\sim W}$ נקבל "אם האלים לא מרוצים אז החיטה לא צומחת" מפני שכדי להתאים לסכמה, ~G נכנס ל-□ ו-~W ל-△

דרך הסכמה "אלא אם □, △", שמתאים לה פה מהסכמה $\sim\square \to \triangle$

$\sim\boxed{G} \to \triangle{\sim W}$ נקבל: "אלא אם האלים מרוצים, החיטה לא צומחת", מפני ש- G נכנס ל-□ ו- ~W ל-△

אם לשחרר מהשפה הטבעית,

אפשר לומר שראינו 3 סכמות שהפסוק $\sim G \to \sim W$ "שייך" אליהן: $\sim\square \to \sim\triangle$, $\square \to \triangle$, $\sim\square \to \triangle$

*במות 'שייך', אבל זה לא חשוב כרגע ☺

סכמה של פסוק בשפה הפורמאלית

נאמר שפסוק שייך לסכמה מסוימת אם (ורק אם) אפשר להציב פסוקים בהצבה עקבית בתוך הסכמה ולקבל בדיוק את הפסוק.

לדוגמא, $\sim G \to \sim W$ לא שייך לסכמה $\triangle \vee \square$, פשוט כי אין שום הצבה של פסוקים לתוך □ ולתוך △ שיתנו בדיוק את הפסוק.

שימו לב שמאותה הסיבה בדיוק, הפסוק גם לא שייך לסכמה $\sim\sim\square \to \sim\triangle$ – שנראית כמו סכמה שהמצאנו לשם הדוגמא...

לכל פסוק, הדגימו אותו לכל אחת מהסכמות שאליהן הוא שייך (מבין האופציות):

$P \to Q$ $\quad \sim Q \to \sim P$ $\quad \sim P \vee Q$ $\quad \sim(P \& \sim Q)$ $\quad (P \& Q) \vee [(\sim P \& Q) \vee (\sim P \& \sim Q)]$ $\quad \sim\sim P \to Q$ $\quad \sim\sim(P \to Q)$

$\square \to \triangle$ $\quad \sim\square \to \sim\triangle$ $\quad \sim\square \to \triangle$ $\quad \square \& \triangle$ $\quad \square \vee \triangle$ $\quad \sim\square \vee \triangle$ $\quad \square \vee \square$ $\quad \square$ $\quad \sim\square$ $\quad \sim\sim\square$

סכמה של פסוק בשפה הפורמלית

נגיד שפסוק שייך לסכמה מסוימת אם (ורק אם) אפשר להציב <u>פסוקים</u> בהצבה עקבית בתוך הסכמה ולקבל <u>בדיוק</u> את הפסוק.

לכל פסוק, הותאמה כל אחת מהסכמות שאליהן הוא שייך (מבין האופציות בעמ' הקודם):

$\sim P\vee Q$
$\Box\vee\triangle$
$\sim\Box\vee\triangle$
$\Box$

$\sim(P\,\&\sim Q)$
$\sim\Box$
$\Box$

$\sim\sim(P\to Q)$
$\sim\sim\Box$
$\Box$

$\sim\sim P\to Q$
$\Box\to\triangle$
$\sim\Box\to\triangle$
$\Box$

$\sim Q\to\sim P$
$\Box\to\triangle$
$\sim\Box\to\sim\triangle$
$\sim\Box\to\triangle$
$\Box$

$P\to Q$
$\Box\to\triangle$
$\Box$

$(P\,\&\,Q)\vee[(\sim P\,\&\,Q)\vee(\sim P\,\&\sim Q)]$
$\Box\vee\triangle$
$\Box$

$\Box\vee\Box$ – אין ברשימה פסוק שזאת הסכמה שלו, כי אין הצבה וכו'... (לעל ומטה)
מפני שההצבה צריכה להיות עקבית: בדיוק פס' אחד יכנס לכל מופע של $\Box$ (לדוג' – $P\vee P$).

$\Box\,\&\,\triangle$ – אין כאן פסוק כזה,
מהסיבה הרגילה: אין הצבה עקבית של פס' ב-$\Box$ ו-$\triangle$ שתניב אחד מהפס' ברשימה.

* שימו לב: אנחנו עוסקים בסימנים גרידא!
הדיון הזה מנותק לגמרי משאלת השקילות הלוגית (וכו' להציג את כל הפסוק עם P ועם Q יחד ועל שקילותם?)

היכולת לראות פסוקים דרך כמה סכמות לוגיות שעלינו להתאים תהיה שימושית ביותר.

במערכות ההוכחה שלנו, ננסה להוכיח תקפות של טיעונים.

נזכיר, לשם כך, את הכלל היסודי של הלוגיקה - לפיו תקפות היא פונקציה (רק) של מבנה.

הוכחות

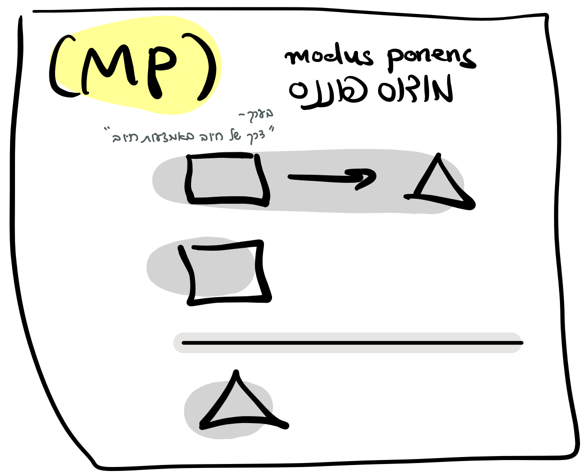
המטרה היא להראות שאפשר להגיע מהנחות של טיעון אל מסקנתו - אבל בדרך ממש ספציפית:

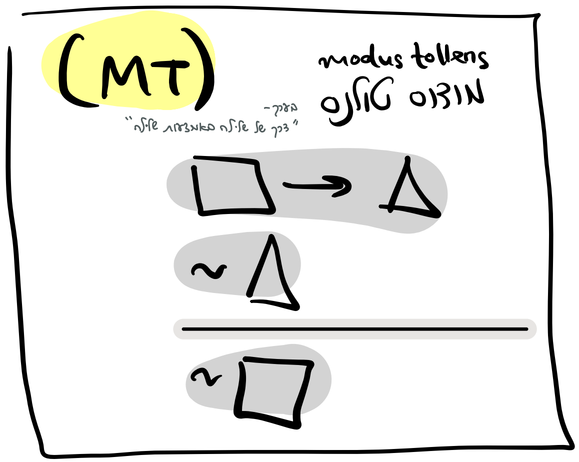
על ידי זה שנראה מסקנות ביניים שעולות מהן ומהדברים שנובעים מהן.

הספציפיות מגיע ש מותר לכתוב בתוך ההוכחה רק מסקנות ביניים שניתן להצדיק באמצעות כללי הגזירה.

כלל גזירה — השמה ספציפית של סכמות של טיעונים תקפים.

לצורך זה, SA, המערכת שנקראת "גזירה הטבעית", נצטרך רק 4 סכמות:





ועוד שתי סכמות
שנגיע עוד אליהן.

! כל גזירה מגדירה מה מותר לכתוב ולהצדיק במהלכה ובאילו תנאים.

את מה שמתקבל
ממסקנה שלנו

אם ורק אם יש לנו בהוכחה
פסוקים ששייכים לסכמה של ההנחות שלו

לפני שנתחיל להשתמש בכללי גזירה להוכחות, כדאי להתאמן על זיהוי טיעונים כשייכים (או לא) לסכמות.

MP

$$\frac{\alpha \to \beta \qquad \alpha}{\beta}$$

MT

$$\frac{\alpha \to \beta \qquad \sim\beta}{\sim\alpha}$$

מבין הטיעונים הבאים:

אילו טיעונים שייכים לסכמה MP? אילו לא?

אילו טיעונים שייכים לסכמה MT? אילו לא?

$$\frac{(P \& Q) \to R \qquad P \& Q}{R}$$

$$\frac{(P \& Q) \to R \qquad Q \& P}{R}$$

$$\frac{P \to Q \qquad Q}{P}$$

$$\frac{P \to Q \qquad \sim P}{\sim Q}$$

$$\frac{P \to P \qquad P}{P}$$

$$\frac{P \to P \qquad \sim P}{\sim P}$$

$$\frac{P \to \sim P \qquad \sim\sim P}{\sim P}$$

$$\frac{\sim P \to P \qquad \sim P}{P}$$

$$\frac{\sim P \to P \qquad \sim P}{\sim\sim P}$$

$$\frac{\sim\sim P \to P \qquad \sim P}{\sim P}$$

$$\frac{\sim\sim P \to \sim P \qquad \sim\sim P}{\sim P}$$

$$\frac{\sim\sim P \to \sim P \qquad \sim\sim P}{\sim\sim\sim P}$$

ניתם את הטיעונים מהשקף הקודם אל צמד הסכמות:

MP

$$\begin{array}{l} \alpha \to \beta \\ \alpha \\ \hline \beta \end{array}$$

MT

$$\begin{array}{l} \alpha \to \beta \\ \sim\beta \\ \hline \sim\alpha \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (P \& Q) \to R \\ P \& Q \\ \hline R \end{array}$$

✓

דוגמא ל- MP $\left(\begin{array}{l}\alpha = P\&Q \\ \beta = R\end{array}\right)$

$$\begin{array}{l} (P \& Q) \to R \\ Q \& P \\ \hline R \end{array}$$

לא שייך לסכמות לעיל

Q&P שקול לוגית ל- P&Q אך לא זהה לו! (בסימנים)

לכן זאת לא דוגמא ל- MP

$$\begin{array}{l} P \to Q \\ Q \\ \hline P \end{array}$$

לא שייך לסכמות לעיל ולא תקף

$$\begin{array}{l} P \to Q \\ \sim P \\ \hline \sim Q \end{array}$$

לא שייך לסכמות לעיל ולא תקף

$$\begin{array}{l} P \to P \\ P \\ \hline P \end{array}$$

דוגמא ל- MP $\left(\begin{array}{l}\alpha = P \\ \beta = P\end{array}\right)$

להציב את אותו הפסוק ב-α וב-β זה בסדר גמור

(צריך עדיין הצבה עקבית כך שכל משתנה מקבל בדיוק פסוק אחד)

$$\begin{array}{l} P \to P \\ \sim P \\ \hline \sim P \end{array}$$

דוגמא ל- MT $\left(\begin{array}{l}\alpha = P \\ \beta = P\end{array}\right)$

$$\begin{array}{l} P \to \sim P \\ P \\ \hline \sim P \end{array}$$

דוגמא ל- MP $\left(\begin{array}{l}\alpha = P \\ \beta = \sim P\end{array}\right)$

חשוב לראות שזאת לא דוגמא ל- MT

$$\begin{array}{l} P \to \sim P \\ \sim\sim P \\ \hline \sim P \end{array}$$

דוגמא ל- MT $\left(\begin{array}{l}\alpha = P \\ \beta = P\end{array}\right)$

$$\begin{array}{l} \sim P \to P \\ \sim P \\ \hline \sim\sim P \end{array}$$

רמז: רק אופציה אחת. $\beta = P$, $\alpha = \sim P$

$$\begin{array}{l} \sim\sim P \to P \\ \sim P \\ \hline \sim P \end{array}$$

רמז: $\alpha = \sim\sim P \quad \beta = P$

$$\begin{array}{l} \sim\sim P \to \sim P \\ \sim\sim P \\ \hline \sim P \end{array}$$

רמז: $\alpha = \sim\sim P \quad \beta = \sim P$

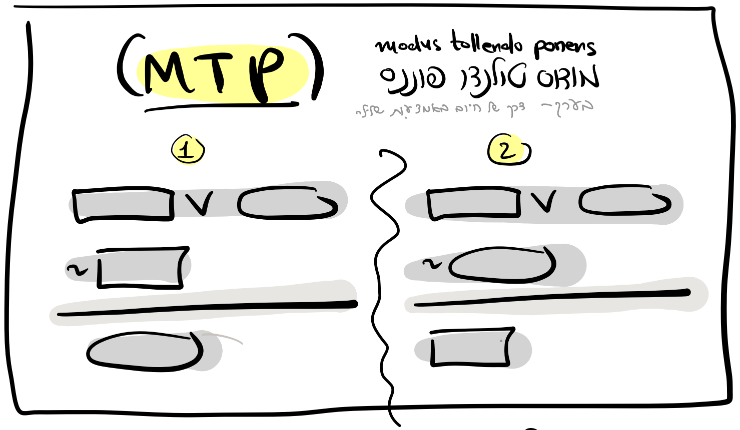
$$\begin{array}{l} \sim\sim P \to \sim P \\ \sim\sim P \\ \hline \sim\sim\sim P \end{array}$$

דוגמא ל- MT

$\alpha = \sim\sim P \quad \beta = \sim P$

מהמשך נעבור למערכת הוכחה אחת עם כללים משלה.

בינתיים, יש עוד צורת טיעון / סכמות שנלמד לזהות בנוסף לגזירה פשוטה, ונבדוק לה בשפת למשל תרגילים ב- 5A:



שימו לב שמדובר בשתי סכמות שונות עם שני שמות שונים.

זה רק עניין טכני, פורמאלי אפילו...
אבל זאת המהות של השיטה! טכנית ופורמאלית.

שווה להקדיש זמן להבנת הסכמה. ודאו שהקביעה לגבי כל טיעון ברורה לכם.

$P \vee Q$, $\sim P$ / Q — MTP 1

$P \vee Q$, $\sim Q$ / P — MTP 2

$P \vee \sim Q$, $\sim P$ / $\sim Q$ — MTP 1

$P \vee \sim Q$, Q / P — לא שייך לסכמות

$P \vee P$, $\sim P$ / P — MTP1 וגם MTP2 וגם

$P \vee P$, $\sim P$ / $\sim P$ — לא שייך לסכמות

$\sim P \vee \sim Q$, $\sim\sim Q$ / $\sim P$ — MTP 2

$(P \vee Q) \vee (Q \vee P)$, $\sim(P \vee Q)$ / $Q \vee P$ — MTP 1 (ולא MTP2)

$P \vee (Q \vee (R \vee (S \vee T)))$, $\sim P \,\&\, (\sim Q \,\&\, (\sim R \,\&\, \sim S))$ / T — לא שייך לסכמות

מהמשך נראה שאפשר "לייצר פה מצב" שבו מותר להשתמש ב- MTP1, מסכמת שימוש בכללי גזירה אחרים (שלא למדנו). אבל תשובה לראות שזה מהחלט לא מסכמת MTP!

דוגמא:

I – $P\to\sim Q;\ \sim Q\to R;\ P\vee S;\ \sim R\ /\ S$

1)	$P\to\sim Q$	Pr.
2)	$\sim Q\to R$	Pr.
3)	$P\vee S$	Pr.
4)	$\sim R$	Pr.
5)	$\sim\sim Q$	2,4,MT

מבנה הוכחה –

⊛ נמספר את הנחות הטיעון, נסדר ברשימה אנכית ונסמן מעבר הנחות.

⊛ "נפעיל" את כללי הגזירה על "הפסוקים שכבר יש בהוכחה

כלומר: נכתוב את מסקנות הביניים שעולות מפסוקים שמופיעים ברשימה "דרך" הסכמות של כללי הגזירה שלנו.

עד שנגיע בדיוק אל הפסוק שמימין מעבר המסקנה.

⊛ B – צעד בהוכחה כולל פס' אחד בדיוק

– כל צעד הוא ממוספר

– אחרי רישום ההנחות, כל צעד מוצדק ע"י

• הסכמה באמצעותה הגענו אליו

• הפסוקים מההוכחה שהזנו בסכמה לשם כך

בינתיים התרגילים פשוטים מספיק בשביל שהם "ייפתרו" יחסית בקלות ע"י הפעלה של הכללים שאפשר.

נסתכל על הפסוקים מההוכחה ונבדוק – האם ניתן "להתאים" צמד פסוקים בדיוק להנחות של אחד מכללי הגזירה.

כדי להתאים את פסוק 1 לסכמה של MT או MP

MP: $\square\to\triangle$, $\square$ / $\triangle$ MT: $\square\to\triangle$, $\sim\triangle$ / $\sim\square$

צריך להציב: $\triangle=\sim Q$; $\square=P$

מכאן של-MP עם 1 נדרש בדיוק הפסוק P

ול-MT עם 1 נדרש בדיוק $\sim\sim Q$

בצעד 5 בהוכחה עדיין אין אף אחד מהפסוקים האלה ברשימה.

אז אין אפשרות להשתמש בפסוק 1 עם כללי הגזירה בשלב זה.

כדי להתאים את פס' 2

ל-MP צריך את הרישא שלו (הפסוק $\sim Q$)

ול-MT צריך את שלילת הסיפא שלו (הפסוק $\sim R$)

שלילת הסיפא של 2 היא בדיוק פסוק 4.

אז ניתן "להפעיל" MT על 2 ו-4 ולקבל את שלילת הרישא של 2.

דוגמא להוכחה מלאה - רק וכל מה שכתוב בשחור הוא חלק חיוני מהתשובה

I - $P\to\sim Q;\ \sim Q\to R;\ P\vee S;\ \sim R\ /\ S$

1)	$P\to\sim Q$	Pr.
2)	$\sim Q\to R$	Pr.
3)	$P\vee S$	Pr.
4)	$\sim R$	Pr.
5)	$\sim\sim Q$	2,4, MT
6)	$\sim P$	1,5, MT
7)	S	3,6, MTP1

בצעד 6, כבר ישלנו את שלילת הספא של 1 וכעת מותר לבצע היסק מהסכמה MT.

פסוק 6 הוא בדיוק שלילת הדיסיונקט הראשון של 3 לכן מותר לבצע היסק מהסכמה MTP1.

<u>כדאי</u> לבצע MTP1 על 3 ועל 6 כי המסקנה שמתקבלת היא מסקנת הטיעון.

מאת סימון.

II - $(P\to\sim Q)\to\sim R;\ P\to\sim Q;\ Q\vee(S\vee R);\ P\ /\ S$

1)	$(P\to\sim Q)\to\sim R$	Pr.
2)	$P\to\sim Q$	Pr.
3)	$Q\vee(S\vee R)$	Pr.
4)	P	Pr.
5)	$\sim Q$	2,4, MP
6)	$\sim R$	1,2, MP
7)	$S\vee R$	3,5, MTP1
8)	S	6,7, MTP2

הסדר לא משנה

הסדר חשוב

על פסוק 2 אפשר לחשוב כשייך ל-2 סכמות:

$\square\to\triangle$ כאשר $\square=P,\ \triangle=\sim Q$

או:

$\square$ כאשר $\square=P\to\sim Q$

אל דרך ההסתכלות הראשונה (המפוצל) אנחנו כבר רגילים. היא שימושית במצב לזהות את האפשרות ל-MP עם פסוק 4.

דרך ההסתכלות השניה (המכווץ) שימושית ל-MP עם פס' 1.

לפעמים, נצטרך להשתמש באותו הפס' פעמיים, בשני אופנים.

בהמשך תראו שלפעמים יש פסוקים בהוכחה שלא צריך להשתמש בהם כלל, זה בסדר גמור...

בשלב הזה, כאמור, התרגילים פשוטים ולכן כדאי להתרגל. תתחילו מצעדים שנראית שמותר ושיש לך שימוש מהם.

מותר גם להשאיר פסוקים מיותרים בהוכחה! בהוכחה לעיל אין צעדים מיותרים

לסיכום

הוכחה כגזירה פשוטה (simple derivation – SD) – לפי 5A בלבד

הוכחה לתקפות הפורמאלית של טיעון תקף שנתון לנו בשפת תחשיב הפסוקים.

הלכה למעשה זאת רשימה סופית וממוספרת של פסוקים, כאשר כל פסוק:

הוא הנחה של הטיעון הנתון (מסומן Pr.)

או

תוצאה של הפעלת כלל גזירה על פסוקים (כלשהם) שיש ברשימה

(מסומן בשם הכלל המקוצר + מס' הפס')

הכללים הם צורניים!
אין משקל לשקילויות לוגיות!
יש להסתמך על הסימנים בלבד.

הכללים הם סכמות של טיעונים תקפים
ולכן באופן טבעי, הם חד-כיווניים:
מההנחות אל המסקנה.

לכל מערכת יש בדיוק את הכללים שלה!
אסור להמציא כללים או "לערבב" מערכות הוכחה.

כללי הגזירה של SD:

MP

$$\frac{\alpha \to \beta \qquad \alpha}{\beta}$$

MT

$$\frac{\alpha \to \beta \qquad \sim\beta}{\sim\alpha}$$

MTP 1

$$\frac{\alpha \vee \beta \qquad \sim\alpha}{\beta}$$

MTP 2

$$\frac{\alpha \vee \beta \qquad \sim\beta}{\alpha}$$

הפעלת כלל גזירה – כתיבה של הפסוק שמתקבל מהכלל בצורה נכונה ומדויקת בסכמות.

נחפש בצמד פסוקים ברשימה שאחד מהם הוא מופע של ההנחה הראשונה של הכלל ואחד מהם הוא מופע של ההנחה השנייה של הכלל.

שימו לב: אנחנו לא מציבים פס' אחד מההוכחה במקום α ועוד פס' מההוכחה במקום β!

מחפשים פס' אחד שהוא מופע מהסכמה $\alpha \to \beta$ או מהסכמה $\alpha \vee \beta$, ובהתאם לו מחפשים פס' מהסכמה של ההנחה השנייה (של כלל הגזירה הרלוונטי).