

תרגול 5

- טבלת אמת
 - "מתכון כללי"
 - דוגמאות
- מה אפשר לעשות עם טבלת אמת?
 - חזרה לתקפות
 - אפיון פסוק: סטטוס לוגי
 - טאוטולוגיה
 - סתירה עצמית
 - קונטינגנציה
 - יחס בין פסוקים: שקילות לוגית
 - דוגמאות בסגנון של $2C+3A$
 - דוגמאות בסגנון של $3C$

טבלת אמת היא ייצוג גראפי של תנאי אמת.

תנאי אמת: באילו מקרים משהו אמיתי ובאילו הוא שקרי.

מקרה הוא מצב אפשרי (לוגית).

**כדי לברר דברים כמו האם טיעון הוא תקף
(האם יש/אין מצב אפשרי בו כל הנחותיו אמיתיות ומסקנתו שקרית)
נצטרך לקחת בחשבון את כל האפשרויות.**

הגדרה של פסוק אטומי:

פסוק שערך האמת שלו הוא לא פונקציית אמת של ערכי האמת של פסוקים אחרים.
**כל קומבינציה אפשרית של ערכי אמת לפסוקים האטומיים
היא מקרה אפשרי שיש לקחת בחשבון.**

מקרה הוא קומבינציה ספציפית של ערכי אמת לפסוקים האטומיים הרלוונטיים. בגלל שלכל פסוק אטומי יש 2 ערכי אמת אפשריים, יש 2^n קומבינציות אפשריות עבור n פסוקים

מקרה מיוצג בטבלת האמת בתור שורה.

אז מס' הפס' האטומיים קובע את מס' השורות בטבלה.

לכן, כך נתחיל טבלת אמת:

- בזיהוי n הפסוקים האטומיים המעורבים (בכל הפסוקים ששמנו על הטבלה יחד)
- ביצירת 2^n שורות בטבלה
- בהקצאה אקראית של ערכי אמת לפס' האטומיים

האקראיות מושגת באופן שיטתי:

בעמודה של הפס' האטומי הראשון* נמלא T בחצי הראשון ו-F בחצי השני
בעמודה של השני* נמלא T ברבע הראשון ו-F ברבע השני וכך הלאה עד סוף העמודה
בעמודה של השלישי* נמלא T בשמינית הראשונה ו-F בשמינית השנייה וכך הלאה

* (כפי סגף ה-ABC!)

ובתוצאה: בעמודה של הפס' האטומי ה- k נכתוב $\frac{2^k}{2^n}$ פעמים T ו- $\frac{2^k}{2^n}$ פעמים F וכך הלאה עד סוף העמודה

בניית טבלת אמת לפסוק

בטבלת האמת של פס' שמורכב מ-n פס' אטומיים יש 2^n שורות
כל פסוק אטומי וכל קשר מקבילים עמודה משלהם
סדר מילוי העמודות הוא בדיוק סדר הבנייה של הנב"כ
ערך האמת בכל תא נקבע לפי טבלת האמת של הקשר הרלוונטי

$$(\sim P \rightarrow Q) \quad \sim(P \rightarrow Q)$$

העמודה האחרונה שנמלא עונה על השאלה:
"מה ערך האמת של הפס' בשורה נתונה?"

בניית טבלת אמת לפסוק

2^n שורות (n – מס' הפס' האטומיים)

עמודה לכל פס' אטומי ולכל קשר

סדר מילוי העמודות הוא סדר בניית הנב"כ

ערך האמת בתא נקבע לפי טבלת האמת/תנאי האמת של הקשר הרלוונטי

(I)

$(\sim$	P	\rightarrow	Q)
F	T	T	T
F	T	T	F
T	F	T	T
T	F	F	F

סדר המילוי: 3 1 2 2

(II)

\sim (P	\rightarrow	Q)
F	T	T	T
T	T	F	F
F	F	T	T
F	F	T	F

סדר המילוי: 2 1 3 2

העמודה האחרונה שנמלא מבטאת את ערך האמת של הפסוק בכל מצב.

עמודה זאת מכונה **המציין של הפסוק** (או של טבלת האמת שלו).

בנו טבלת אמת לכל אחד מהפסוקים הבאים:

שימו לב לסדר הקנייה של הנסי'כ!

(III) $P \rightarrow P$

(IV) $(P \& Q) \leftrightarrow (P \rightarrow \sim Q)$

(V) $\sim P \& (Q \rightarrow (R \leftrightarrow \sim(R \vee P)))$

תוצאות:

פסוק מוזכרה	\sim	אמת	אמ"ם	α שקרי
פסוק מוזכרה	$(\beta \& \alpha)$	אמת	אמ"ם	הן α אמת והן β אמת
פסוק מוזכרה	$(\alpha \vee \beta)$	שקרי	אמ"ם	הן α שקרי והן β שקרי
פסוק מוזכרה	$(\beta \rightarrow \alpha)$	שקרי	אמ"ם	α אמת ו- β שקרי
פסוק מוזכרה	$(\beta \leftarrow \alpha)$	שקרי	אמ"ם	שקרי האמת של α שקרי ושקרי האמת של β

(iii)

P	→	P
T	T	T
F	T	F

יש פה שני אטומים - P, Q - אז $2^2 = 2$ שורות
 נכתבו אז לכל האמת מתחת P והמתן למטה השני!
 (כי זה הוא פשוט)

(iv)

(P & Q)	↔	(P → ~ Q)
T	T	F
T	F	F
F	T	F
F	F	F

שני פ' אטומים, P, Q - אז $2^2 = 4$ שורות

זה נראה
 (אם יש לך 5 שורות)

(v)

~	P	& (Q	→ (R	↔	~ (R	∨	P))
F	T	F	T	F	T	F	F	T	T	T
F	T	F	T	T	F	T	F	F	T	T
F	T	F	F	T	T	F	F	T	T	T
F	T	F	F	T	F	T	F	F	T	T
T	F	F	T	F	T	F	F	T	T	F
T	F	F	T	F	F	F	T	F	F	F
T	F	T	F	T	T	F	F	T	T	F
T	F	T	F	T	F	F	T	F	F	F

3 פ' אטומים - P, Q, R - אז $2^3 = 8$ שורות

קשה והחשוב שאין לך אמת גמולה - מונחים שאם נכנסים - החזק של הפסוק האופני.

סטטוס לוגי של פסוק הוא סיווג של המציין של הפסוק

פסוק שבמציין שלו יש רק T נקרא טאוטולוגיה

פסוק שבמציין שלו יש רק F נקרא סתירה עצמית

פסוק שבמציין שלו יש לפחות T אחד ולפחות F אחד נקרא קונטינגנציה

ניסוח קצת פחות טכני:

טאוטולוגיה היא פסוק שהוא אמיתי בהכרח (בכל עולם אפשרי)

סתירה עצמית היא פסוק שהוא שקרי בהכרח (בכל עולם אפשרי)

קונטינגנציה היא פסוק שערך האמת שלו "מקרי" (יש עולמות שכן ויש שכך)

שימו לב להבדל:

פסוק אמיתי הוא פסוק שערך האמת שלו בעולמנו הוא T

טאוטולוגיה היא פסוק שערך האמת שלו בכל עולם הוא T

האם טיעון שמסקנתו אמיתית הוא בהכרח תקף? (א) האם טיעון שמסקנתו טאוטולוגיה הוא בהכרח תקף? (ב)

האם טיעון שמסקנתו טאוטולוגיה הוא בהכרח תקף?

האם טיעון שמסקנתו אמיתית הוא בהכרח תקף?

דוגמאות לפתרון תרגיל כמו בסטים 2C+3A

זכרו: סדר מילוי העמודות הוא סדר בניית הנב"כ
תוכן התא נקבע לפי טבלת האמת של הקשר הרלוונטי

(v) מה הסטטוס הלוגי של הפסוק $(P \& Q) \leftrightarrow (P \rightarrow \sim Q)$?

(P	&	Q)	\leftrightarrow	(P	\rightarrow	\sim	Q)
T	T	T	F	T	F	F	T
T	F	F	F	T	T	T	F
F	F	T	F	F	T	F	T
F	F	F	F	F	T	T	F

במציין של הפסוק יש רק F ולכן הפסוק הוא סתירה עצמית.

זוהי תשובה נכונה לבעיה $2C+3A$ "Go"

(iii)

P	\rightarrow	P
T	T	T
F	T	F

מציין של הטעם אין F. מכאן שהטעם הוא טרואר.

(iv)

(P & Q)	\leftrightarrow	(P \rightarrow \sim Q)
T T T	F	T F F T
T F F	F	T T T F
F F T	F	F T F T
F F F	F	F T T F

מציין של הטעם אין T. מכאן שהטעם הוא טרואר.

(v)

\sim	P	& (Q	\rightarrow (R	\leftrightarrow	\sim (R	\vee	P))
F	T	F	T	F	T	F	F	T	T	T
F	T	F	T	T	F	T	F	F	T	T
F	T	F	F	T	T	F	F	T	T	T
F	T	F	F	T	F	T	F	F	T	T
T	F	F	T	F	T	F	F	T	T	F
T	F	F	T	F	F	F	T	F	F	F
T	F	T	F	T	T	F	F	T	T	F
T	F	T	F	T	F	F	T	F	F	F

מציין של הטעם יש פחות T אחד (לדוג' שורה 7) ולפחות F אחד (לדוג' שורה 1). מכאן שהטעם הוא קונטראדיקציה.

טבלת אמת ליותר מפסוק אחד

כאמור, מקרה/מצב/עולם אפשרי זאת קומבינציה ספציפית של ערכי אמת לפסוקים אטומיים.

אפשר להשתמש בטבלאות אמת כדי לשאול על יחסים בין פסוקים (כמו בעמ' הבאים). למשל, אולי נתעניין ביחסים בין פסוק (V) שראינו קודם לבין הפסוק $\sim Q$.

אבל... קצת קשה להגיע למסקנות אם פשוט נשים את טבלאות האמת שלהם זו לצד זו

\sim	P	& (Q	\rightarrow (R	\leftrightarrow	\sim (R	\vee	P))
F	T	F	T	F	T	F	F	T	T	T
F	T	F	T	T	F	T	F	F	T	T
F	T	F	F	T	T	F	F	T	T	T
F	T	F	F	T	F	T	F	F	T	T
T	F	F	T	F	T	F	F	T	T	F
T	F	F	T	F	F	F	T	F	F	F
T	F	T	F	T	T	F	F	T	T	F
T	F	T	F	T	F	F	T	F	F	F



\sim	Q
F	T
T	F

כדי לענות על שאלות "האם יש/אין מצב אפשרי בו....", כשיש יותר מפסוק אחד, עלינו לשקול כל אחד מהם במצב נתון (אותו המצב).

בדקו אם מתקיים יחס השקילות בין הפסוקים האלה, כשתסיימו לקרוא את הקובץ.

כדי לדבר על יחסים בין פסוקים נבנה טבלת אמת לכולם.

**לקביעת מס' השורות
נספור כל פס' אטומי שמופיע לפחות בפס' אחד.**

למשל:

טבלת האמת של טיעון היא טבלת אמת לכל הנחותיו ולמסקנתו.

מכיוון שטבלת האמת היא סיכום של היחסים בין הפסוקים בכל מצב אפשרי, אפשר להשתמש בטבלאות אמת לבדיקת תקפות של טיעונים.

סוף סוף, שיטה חד-משמעית לבדיקת תקפות של טיעונים!
(ולא רק להוכיח את התקפותם...)

טבלת האמת של טיעון היא טבלת אמת לכל הנחותיו ולמסקנתו.

מס' השורות הוא 2^n (n הוא מס' הפסוקים האטומיים בכל רכיבי הטיעון)
נשתמש בעמודה ריקה המסומנת ב-; בשביל להפריד בין הנחה להנחה
נשתמש בעמודה ריקה המסומנת ב-/ לציון הפס' הבא בתור המסקנה

טיעון הוא תקף אם"ם לא יתכן שכל הנחותיו אמיתיות ומסקנתו שקרית
טיעון הוא תקף אם"ם אין עולם בו כל ההנחות מקבלות T והמסקנה F

טיעון הוא תקף

אם"ם

אין בטבלת האמת שלו שורה

בה כל הנחה מקבלת T

והמסקנה מקבלת F

רק טבלת אמת מלאה מהווה הוכחה לתקפות של טיעון.

כמובן: **טיעון הוא לא-תקף** אם"ם יש בטבלת האמת שלו לפחות שורה אחת כזאת.

יש להראות טבלה מלאה ולציין את מס' השורה "המפלילה".

ניקיר מתקף, האונת. ט"א :

דוגמא לפתרון של תרגיל כמו בסט 3C

כל ורק מה שמופיע בצבע שחור חיוני לתשובה מלאה

בדקו את תקפות הטיעון באמצעות טבלת אמת:

$$P \rightarrow Q ; Q \rightarrow P ; R \leftrightarrow \sim Q / \sim P \vee \sim Q$$

P	\rightarrow	Q	;	Q	\rightarrow	P	;	R	\leftrightarrow	\sim	Q	/	\sim	P	\vee	\sim	Q
T	T	T		T	T	T		T	F	F	T		F	T	F	F	T
T	T	T		T	T	T		F	T	F	T		F	T	F	F	T
T	F	F		F	T	T		T	T	T	F		F	T	T	T	F
T	F	F		F	T	T		F	F	T	F		F	T	T	T	F
F	T	T		T	F	F		T	F	F	T		T	F	T	F	T
F	T	T		T	F	F		F	T	F	T		T	F	T	F	T
F	T	F		F	T	F		T	T	T	F		T	F	T	T	F
F	T	F		F	T	F		F	F	T	F		T	F	T	T	F

קיימת שורה בה כל הנחה מקבלת T והמסקנה מקבלת F (שורה 2).
לכן הטיעון אינו תקף.

* סמנו את השורה "המפילה" כחול!

חצי ממה שצריך בשביל סט 3B

לקראת המטלה הבאה

אפשר לחקור גם יחסים שמתקיימים בין פס' בודד לבין פס' בודד.

לדוגמא, חשבו על הפסוקים: אם לא אצא לעשן, אשתגע

או שאצא לעשן או שאשתגע

ננסה לתרגם אותם אינטואיטיבית לתחשיב הפסוקים. נסמן "אצא לעשן" ב-S ו"אשתגע" ב-D. נקבל

$$\sim S \rightarrow D \quad (1) \quad S \vee D \quad (2)$$

נדון בזה בהרחבה בהמשך. בינתיים אזכיר שנתייחס רק למה "שנאמר" במפורש ולא למה שמשתמע.

כדי לבחון את הפסוקים אחד ביחס לשני, נשים את שניהם על טבלה אחת:

\sim	S	\rightarrow	D	;	S	\vee	D
F	T	T	T		T	T	T
T	F	T	T		F	T	T
F	T	T	F		T	T	F
T	F	F	F		F	F	F

המציינים שלהם זהים לחלוטין. יחס כזה בין המציינים נקרא שקילות לוגית.

α שקול לוגית ל- β אם הם המציינים שלהם זהים

כלומר...

אם הם ערכי האמת שלהם בכל מצב אפשרי

אם הם אין שורה בה ערכי האמת שלהם שונים (זה מזה)

ולקראת השבוע הבא, תזכרו שזה אותו דבר כמו להגיד שאין שורה שבה α אמיתי ו- β שקרי וגם אין שורה שבה α שקרי ו- β אמיתי

תשובה לא מנוקדת:

לרפס נוא טאוטולוגיה!
... ואם הטיעונים $\frac{\alpha}{\beta} \rightarrow \frac{\beta}{\alpha}$? (ניח שטווח)

נקודה למחשבה: מה זה אומר על פסוק מהצורה $\alpha \leftrightarrow \beta$?

בעמ' הבא דוגמא לפתרון חלקי של תרגילים מסט 3B (רק סעיף (3) בספר)
בשבוע הבא נמשיך מהחלק השני

תרגיל כמו בסט 3B – סעיף (3) בלבד:

בדקו אם יחס השקילות מתקיים בין הפסוק $(P \rightarrow (Q \& \sim R)) \vee \sim Q$ לבין הפסוק $\sim P$.

נבנה טבלת אמת אחת לשני הפסוקים (לפי העקרונות הרגילים) ונמלאה (כנ"ל):

(P	→	(Q	&	~	R))	∨	~	Q	;	~	P
T	F	T	F	F	T	F	F	T		F	T
T	T	T	T	T	F	T	F	T		F	T
T	F	F	F	F	T	T	T	F		F	T
T	F	F	F	T	F	T	T	F		F	T
F	T	T	F	F	T	T	F	T		T	F
F	T	T	T	T	F	T	F	T		T	F
F	T	F	F	F	T	T	T	F		T	F
F	T	F	F	T	F	T	T	F		T	F

אמנם אין שורה בה ערך האמת של (2) אמיתי וערך האמת של (1) שקרי, אבל יש שורה בה ערך האמת של (1) אמיתי וערך האמת של (2) שקרי. כלומר: יש שורה בה ערך האמת של (1) שונה מערך האמת של (2); למשל, בשורה 2. מכאן שהפסוקים אינם שקולים לוגית.

קריאה אופציונלית אך מומלצת – תשובות לשאלות מעמ' 8 בקובץ זה, בסיוע טבלאות אמת (ככלי עזר לחשיבה):

טען שמסקנתו אמינה

...	/	מסקנה
		⋮
		T
		⋮

א) כל טיעון שמסקנתו אמיתית בוודאות תקף

לא ניתן מספיק בסיס להסיק על כל שורה בט"א של כל טען ככה. ככה (פאה הוציא): טען היחיד

כפי שראינו בשיעורים קודמים, התשובה היא: **לא נכון**. כל שנתון לנו הוא שיש אפשרות לוגית שהמסקנה אמיתית (עולמנו מוכיח זאת). זה לא מבטיח שאין אפשרות לוגית שהמסקנה שקרית וכל ההנחות אמיתיות (בעולם כלשהו).

טען שמסקנתו טאוטולוגיה

...	/	מסקנה
		T
		T
		T
		(T)
		T

כל
טען
אפשרי

ב) כל טיעון שמסקנתו טאוטולוגיה בוודאות תקף

ככה (פאה התיקן):

התשובה היא: **נכון**. זה שהמסקנה היא טאוטולוגיה אומר שאין אפשרות לוגית בה היא שקרית. זה מבטיח את זה שאין אפשרות לוגית בה המסקנה שקרית ו... כל דבר אחר, בין השאר כל ההנחות אמיתיות. אז בטח שהוא תקף.

אין מצב = אין אפשרות (אזיה) = אין שורה
יש מצב = יש אפשרות (אזיה) = יש שורה